§3 线性方程组

• 知识回顾

矩阵 → 行列式 → 线性方程组 → 克拉默法则

• 给定由 n 个变量，n 个方程组成的线性方程组，形式如下。

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad \cdot \qquad \cdot \qquad \cdot \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \qquad ①$$

• 令 $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ 为未知向量，$\vec{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$ 为常数向量。

$$A = \begin{bmatrix} a_{11}, a_{12}, \cdots a_{1n} \\ a_{21}, a_{22}, \cdots a_{2n} \\ \vdots \\ a_{n1}, a_{n2}, \cdots a_{nn} \end{bmatrix}_{n\times n}$$ 为系数矩阵。

则利用矩阵与向量记号，线性方程组①可写成如下形式

$$A\vec{x} = \vec{b} \qquad ②$$

• 当 $\vec{b}=0$ 时，称方程组为齐次线性方程组。

当 $\vec{b}\neq 0$ 时，称方程组为非齐次线性方程组

基本问题 如何求解方程组①(或②)?

子问题：① 解是否存在？

② 若解存在，是否唯一？

③ 若解不唯一，则不同解之间有何关系？

定理1(克拉默法则)

设 $A\vec{x}=\vec{b}$ 为一个由 n 个变量，n 个方程组成的线性方程组，

记 $D=\det(A)$ 为系数矩阵 A 的行列式，则

(i) 若 $D\neq 0$，则方程组∃!解，满足对 $\forall j=1,\dots,n$，

$$x_j=\frac{D_j}{D}.$$

(ii) 若 $D\neq 0$ 且 $\vec{b}=0$，则方程组∃!零解。

(iii) 若 $D=0$ 且 $\vec{b}=0$，则方程组∃非零解。

这里，对 $\forall j\in\{1,\dots,n\}$，$D_j$ 为矩阵

$$A_j=\begin{bmatrix} a_{11}\cdots & b_1 & \cdots a_{1n}\\ a_{21}\cdots & b_2 & \cdots a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ a_{n1}\cdots & \underbrace{b_n}_{\text{第}j\text{列}} & \cdots a_{nn}\end{bmatrix}_{n\times n}$$ 的行列式

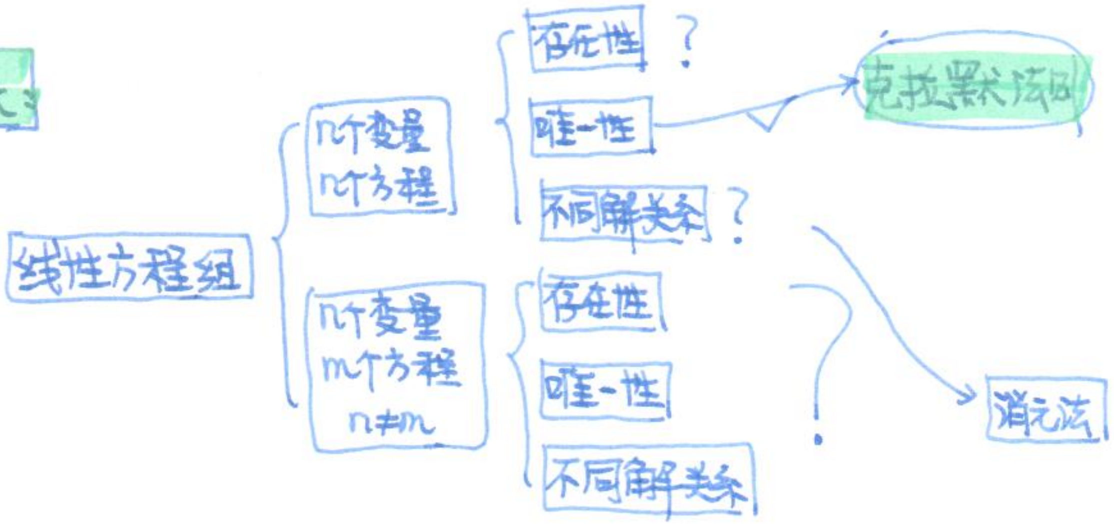
(A_j 由矩阵 A，将第 j 列向量，用常数向量 $\vec{b}$ 替换而得)。

参照基本问题(特别是三个子问题),知克拉默法则对其作了很好的回答。特别是当解唯一时,克拉默法则可直接给出解的表达式。然而克拉默法则仍有如下两个缺陷:

① 当解不唯一时,无法建立不同解之间的关系(对应子问题③)。

② 对更一般的,由n个变量,m个方程组成的线性方程组,无法处理。

当前现状:



学习目标: 利用消元法,给出一般的由n个变量,m个方程组成的线性方程组解的存在,唯一性,以及不同解之间的关系。

从而完整地回答我们的基本问题

§3.1 线性方程组

• 考虑由 n 个变量，m 个方程组成的线性方程组，形式如下，

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m . \end{cases} \quad ③$$

• 令 $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ $\vec{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$ 分别为未(知)向量与常数向量.

令 $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m\times n}$ 为系数矩阵.

知线性方程组③可写成如下矩阵形式，

$$A\vec{x} = \vec{b} \qquad ④$$

定义2（解）设 $\vec{k} = \begin{bmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_n \end{bmatrix}$ 为一个 n 维数向量，若 $\vec{k}$ 满足 $A\vec{k} = \vec{b}$，则称 $\vec{k}$ 为④的一个解（向量）.

定义3（解集）方程组④解的全体，称作④的解集.

利用上述概念，我们的基本问题便转化为寻求④的解集.

三个典型的例子:

例1 求解
$$\begin{cases} x_1+3x_2+2x_3+x_4=6 \\ x_2-x_3+4x_4=6 \\ 2x_3-7x_4=-1 \\ x_4=1. \end{cases}$$

解：易知
$$\begin{cases} x_4=1 \\ 2x_3=-1+7x_4=6 \Rightarrow x_3=3 \\ x_2=6+x_3-4x_4=6+3-4=5 \\ x_1=6-3x_2-2x_3-x_4=6-15-6-1=-16 \end{cases}$$

从而方程组存在唯一解

$$\vec{x}=\begin{bmatrix} -16 \\ 5 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

例2 求解
$$\begin{cases} x_1+3x_2+2x_3+x_4=6 \\ x_2-x_3+4x_4=6 \\ 2x_3-7x_4=-1 \\ 0x_4=1. \end{cases}$$

解：由最后一个等式恒不成立，知方程组无解

例③ 求解

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4 & ① \\ x_2 - x_3 + x_4 = 0 & ② \\ 2x_4 = -6 & ③ \\ x_4 = -3 & ④ \end{cases}$$

解：上述方程组等价于

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4 \\ x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_4 = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_4 = -3 \\ x_2 = x_3 - x_4 = x_3 + 3 \\ x_1 = 4 - x_2 + 2x_3 - x_4 \\ \quad = 4 - 3 - x_3 + 2x_3 + 3 \\ \quad = 4 + x_3 . \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_3 + 4 \\ x_2 = x_3 + 3 \\ x_3 = x_3 + 0 \\ x_4 = \cancel{-3}\ 0x_3 - 3 \end{cases} \Rightarrow \vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

令 $x_3 = t$ 为自由变量，知方程组解不唯一，且不同解都可表示为

$$\vec{x} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

小结 在上述三个例子中，线性方程组的解都可以简单地求出.

总结这三类线性方程组的系数矩阵如下.

$$A_1=\begin{bmatrix}1&3&2&1\\0&1&-1&4\\0&0&2&-7\\0&0&0&1\end{bmatrix} \longrightarrow \text{上三角阵}$$

$$A_2=\begin{bmatrix}1&3&2&1\\0&1&-1&4\\0&0&2&-7\\0&0&0&0\end{bmatrix} \qquad A_3=\begin{bmatrix}1&1&-2&1\\0&1&-1&1\\0&0&0&2\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

↓ 行阶梯阵.

$$A_1=\begin{bmatrix}1&3&2&1\\0&1&-1&4\\0&0&2&-7\\0&0&0&1\end{bmatrix} \qquad A_2=\begin{bmatrix}1&3&2&1\\0&1&-1&4\\0&0&2&-7\\0&0&0&0\end{bmatrix} \qquad A_3=\begin{bmatrix}1&1&-2&1\\0&1&-1&1\\0&0&0&1\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

定义4 (行阶梯矩阵). 设A为一个矩阵. 称A为一个行阶梯矩阵, 若可在矩阵内画一条阶梯线满足:

① 线的下方全为0.

② 每个台阶只有一行

③ 阶梯线竖线后面的第一个元素非0.

$$\begin{bmatrix}1&3&2&1\\0&1&-1&4\\0&0&2&-7\\1&0&0&1\end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix}1&3&2&1\\0&1&-1&4\\0&1&2&-7\\0&0&0&0\end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix}1&3&2&1\\0&1&-1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

不满足①　　　　不满足②　　　　不满足③

定义5 (行最简形矩阵) 设A为一个行阶梯矩阵, 若在条件③中阶梯线竖线后的第一个元素为1, 则称A为行最简形矩阵. 例如.

$$\begin{bmatrix}1&3&2&1\\0&1&-1&4\\0&0&2&-7\end{bmatrix} \times \qquad \begin{bmatrix}1&3&2&1\\0&1&-1&4\\0&0&1&-7\end{bmatrix} \checkmark$$

性质6(行阶梯方程组求解)

设 $A\vec{x}=\vec{b}$ 为一个线性方程组，其中A为一个行阶梯阵，则方程组的解集可直接求出.

§3.2 初等变换

由前面讨论知，给定n个变量，m个方程的线性方程组，$A\vec{x}=\vec{b}$，若A为行阶梯阵，则解集可求.

一个自然的问题：若A非行阶梯阵，则如何求解集？

回顾在学习$n\times n$方阵时，有对任意给定的方阵A

矩阵：$A \xrightarrow{\text{处理}\left\{\begin{array}{l}\text{对换，}\\ \text{数乘，数乘相加}\end{array}\right.} B=$ 上三角阵

$\downarrow$

线性方程组：$A\vec{x}=\vec{b} \xrightarrow{\text{处理}} C\vec{x}=\vec{d}$，其中$C$为行阶梯阵？

$\boxed{\text{初等变换}}$

策略：给定$\forall$线性方程组$A\vec{x}=\vec{b}$，先对方程组作初等变换得新的线性方程组$C\vec{x}=\vec{d}$，再通过对后一方程的求解，来解$A\vec{x}=\vec{b}$.

定义7(同解方程组). 设$A\vec{x}=\vec{b}$，$C\vec{x}=\vec{d}$为两个线性方程组，称这两个方程组同解，若它们的解集相同

• 设由n个变量, m个方程组成的线性方程如下

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 & ① \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 & ② \\ \quad \cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m & ⓜ \end{cases} \quad ③ \quad (3).$$

引入如下三个类型的行初等变换.

1.(对换) ⓘ⟷ⓙ

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 & ① \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 & ② \\ \quad \cdots \\ a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{in}x_n=b_i & ⓘ \\ \quad \cdots & \vdots \\ a_{j1}x_1+a_{j2}x_2+\cdots+a_{jn}x_n=b_j & ⓙ \\ \quad \cdots & \vdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m & ⓜ \end{cases} \xrightarrow{ⓘ\leftrightarrow ⓙ} \begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 & ① \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 & ② \\ \quad \cdots & \vdots \\ a_{j1}x_1+a_{j2}x_2+\cdots+a_{jn}x_n=b_j & ⓘ \\ \quad \cdots & \vdots \\ a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{in}x_n=b_i & ⓙ \\ \quad \cdots & \vdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m & ⓜ \end{cases}$$

性质1(对换). 设线性方程组 $A\vec{x}=\vec{b}$ 与 $C\vec{x}=\vec{d}$ 之间相差一个对换, 则两个方程组同解.

2.(数乘) $k(i)$

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ \vdots \\ a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{in}x_n=b_i \\ \vdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases} \xrightarrow{k(i)} \begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ \vdots \\ ka_{i1}x_1+ka_{i2}x_2+\cdots+ka_{in}x_n=kb_i \\ \vdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases}$$

性质2(数乘) 设线性方程组 $A\vec{x}=\vec{b}$ 与 $C\vec{x}=\vec{d}$ 之间相差一个数乘，则两个线性方程组同解.

3.(数乘相加) $k(i)+(j)$

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 & (1) \\ \vdots & \vdots \\ a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{in}x_n=b_i & (i) \\ \vdots & \vdots \\ a_{j1}x_1+a_{j2}x_2+\cdots+a_{jn}x_n=b_j & (j) \\ \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m & (m) \end{cases} \xrightarrow{k(i)+(j)} \begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ \vdots \\ a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{in}x_n=b_i \\ \vdots \\ (ka_{i1}+a_{j1})x_1+\cdots+(ka_{in}+a_{jn})x_n=kb_i+b_j \\ \vdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases}$$

性质3(数乘相加) 设线性方程组 $A\vec{x}=\vec{b}$ 与 $C\vec{x}=\vec{d}$ 之间相差一个数乘相加，则两个线性方程组同解

$\boxed{\text{小结}}$: $A\vec{x}=\vec{b} \xrightarrow[\substack{\text{对换} \\ \text{数乘} \\ \text{数乘相加}}]{\text{行初等变换}} C\vec{x}=\vec{d}$.

§3.2 消元法

消元法：给定线性方程组$A\vec{x}=\vec{b}$，利用初等变换将其化成新的方程组$C\vec{x}=\vec{d}$，满足：1) C为行阶梯阵，2) 两方程组同解，再通过求解$C\vec{x}=\vec{d}$来得到$A\vec{x}=\vec{b}$的解集

例4：求解线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 2 & ① \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4 & ② \\ 4x_1 - 6x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 4 & ③ \\ 3x_1 + 6x_2 - 9x_3 + 7x_4 = 9 & ④ \end{cases} \quad (*)$$

解：

$$(*) \xrightarrow{①\leftrightarrow②} \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 2 \\ 4x_1 - 6x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 4 \\ 3x_1 + 6x_2 - 9x_3 + 7x_4 = 9 \end{cases} \xrightarrow{③\times\frac{1}{2}} \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4 & ① \\ 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 2 & ② \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 = 2 & ③ \\ 3x_1 + 6x_2 - 9x_3 + 7x_4 = 9 & ④ \end{cases}$$

$$\xrightarrow[\substack{-2①+③ \\ -3①+④}]{-③+②} \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4 & ① \\ 2x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 0 & ② \\ -5x_2 + 5x_3 - 3x_4 = -6 & ③ \\ 3x_2 - 3x_3 + 4x_4 = -3 & ④ \end{cases} \xrightarrow{②\times\frac{1}{2}} \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 4 & ① \\ x_2 - x_3 + x_4 = 0 & ② \\ -5x_2 + 5x_3 - 3x_4 = -6 & ③ \\ 3x_2 - 3x_3 + 4x_4 = -3 & ④ \end{cases}$$

$$\xrightarrow[-3②+④]{5②+③}\begin{cases} x_1+x_2-2x_3+x_4=4 & ① \\ x_2-x_3+x_4=0 & ② \\ 2x_4=-6 & ③ \\ x_4=-3 & ④ \end{cases}$$

系数矩阵 $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cancel{2}\,1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 为行阶梯阵

回顾之~~前~~前例③知新线性方程组之解

$$\vec{x}=t\begin{bmatrix}1\\1\\1\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}4\\3\\0\\-3\end{bmatrix},$$ 其中 $t\in\mathbb{R}$，为自由变量.

由初等变换下解不变，知上述 $\vec{x}$ 也是题中方程的解.